EJERCICIO ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA **CAPÍTULO 2**

AUTOR DEL CURSO: Javier García

EJERCICIO RESUELTO: Miguel Ángel Montañez 15-08-2022

Ejercicio 2. Demostrar que las únicas matrices que conmutan con las γ^μ de Dirac, además de la matriz unidad, son aquellas que se pueden expresar como producto de un número complejo por la matriz unidad.

Las matrices de Dirac se pueden expresar:

$$\gamma^0 = \sigma^3 \otimes \mathbb{I}_{2x2} \qquad \gamma^1 = i\sigma^2 \otimes \sigma^1 \qquad \gamma^2 = i\sigma^2 \otimes \sigma^2 \qquad \gamma^3 = i\sigma^2 \otimes \sigma^3$$

donde σ^1, σ^2 y σ^3 son las matrices de Pauli.

Consideremos una matriz 4x4 general que llamamos C, y vamos a obligar que conmute con γ^0:

$$[C, \gamma^0] = C\gamma^0 - \gamma^0 C = 0$$

Se deduce que:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & -c_{13} & -c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & -c_{23} & -c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & -c_{33} & -c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & -c_{43} & -c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & -c_{34} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & -c_{44} \end{bmatrix}$$

En consecuencia: $c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} = c_{31} = c_{32} = c_{41} = c_{42} = 0$, por lo que podemos expresar C:

$$C = A \oplus B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes A \quad + \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes B$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta esta estructura, consideramos ahora el conmutador $[C, \gamma^1]$ y lo igualamos a cero:

$$[C, \gamma^1] = [A \oplus B, \gamma^1] = [D_1 \otimes A + D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^1] =$$

$$[D_1 \otimes A, i\sigma^2 \otimes \sigma^1] + [D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^1]$$

donde D_1 y D_2 son las matrices:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$[C, \gamma^1] = [D_1 \otimes A, i\sigma^2 \otimes \sigma^1] + [D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^1] =$$

$$(D_1 \otimes A)\cdot(i\sigma^2 \otimes \sigma^1) - (i\sigma^2 \otimes \sigma^1)\cdot(D_1 \otimes A) + (D_2 \otimes B)\cdot(i\sigma^2 \otimes \sigma^1) - (i\sigma^2 \otimes \sigma^1)\cdot(D_2 \otimes B) =$$

$$D_1 i\sigma^2 \otimes A\sigma^1 - i\sigma^2 D_1 \otimes \sigma^1 A + D_2 i\sigma^2 \otimes B\sigma^1 - i\sigma^2 D_2 \otimes \sigma^1 B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes A\sigma^1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^1 A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes B\sigma^1 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^1 B = 0$$

Como las matrices D_1 y D_2 son independientes obtenemos:

$$A\sigma^1 = \sigma^1 B \qquad\qquad B\sigma^1 = \sigma^1 A$$

$$A = \sigma^1 B\, \sigma^1$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{44} & c_{43} \\ c_{34} & c_{33} \end{pmatrix}$$

De aquí deducimos que:

$$c_{11} = c_{44} \qquad c_{22} = c_{33} \qquad c_{12} = c_{43} \qquad c_{21} = c_{34}$$

Si llamamos:

$$c_{11} = c_{44} = a \qquad c_{22} = c_{33} = d \qquad c_{12} = c_{43} = b \qquad c_{21} = c_{34} = c$$

Las matrices A y B quedan:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a obligar que el conmutador $[C, \gamma^2]$ sea cero:

$$[C, \gamma^2] = [A \oplus B, \gamma^2] = [D_1 \otimes A + D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^2] =$$

$$[D_1 \otimes A, i\sigma^2 \otimes \sigma^2] + [D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^2]$$

Operando:

$$(D_1 \otimes A)\cdot(i\sigma^2 \otimes \sigma^2) - (i\sigma^2 \otimes \sigma^2)\cdot(D_1 \otimes A) + (D_2 \otimes B)\cdot(i\sigma^2 \otimes \sigma^2) - (i\sigma^2 \otimes \sigma^2)\cdot(D_2 \otimes B) =$$

$$D_1 i\sigma^2 \otimes A\sigma^2 - i\sigma^2 D_1 \otimes \sigma^2 A + D_2 i\sigma^2 \otimes B\sigma^2 - i\sigma^2 D_2 \otimes \sigma^2 B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes A\sigma^2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^2 A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes B\sigma^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^2 B = 0$$

Como las matrices D_1 y D_2 son independientes obtenemos:

$$A\sigma^2 = \sigma^2 B \qquad\qquad B\sigma^2 = \sigma^2 A$$

$$A = \sigma^2 B\,\sigma^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

De aquí deducimos que:

$$b = c = 0$$

Así pues, las matrices A y B quedan:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Por último, hacemos $\left[C, \gamma^3\right]$ cero:

$$\left[C, \gamma^3\right] = \left[A \oplus B, \gamma^3\right] = \left[D_1 \otimes A + D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right] =$$

$$\left[D_1 \otimes A, i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right] + \left[D_2 \otimes B, i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right]$$

Operando:

$$\left(D_1 \otimes A\right)\cdot\left(i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right) - \left(i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right)\cdot\left(D_1 \otimes A\right) + \left(D_2 \otimes B\right)\cdot\left(i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right) - \left(i\sigma^2 \otimes \sigma^3\right)\cdot\left(D_2 \otimes B\right) =$$

$$D_1 i\sigma^2 \otimes A\sigma^3 - i\sigma^2 D_1 \otimes \sigma^3 A + D_2 i\sigma^2 \otimes B\sigma^3 - i\sigma^2 D_2 \otimes \sigma^3 B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes A\sigma^3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^3 A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes B\sigma^3 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma^3 B = 0$$

Como las matrices D_1 y D_2 son independientes obtenemos:

$$A\sigma^3 = \sigma^3 B \qquad\qquad B\sigma^3 = \sigma^3 A$$

$$A = \sigma^3 B\, \sigma^3$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

De aquí deducimos que:

$$a = d = \alpha$$

Así pues, las matrices A y B quedan:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

En consecuencia, las matrices que conmutan con las matrices de Dirac tienen el siguiente aspecto:

$$C = A \oplus B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\, \mathbb{I}_{4x4}$$

donde por lo general α es un número complejo, tal y como queríamos demostrar.

Con ésto, también se puede demostrar de forma sencilla:

$$[C, \gamma^0\gamma^a] = 0 \qquad\qquad a = 1, 2, 3$$

$$[C, \gamma^0\gamma^a] = \gamma^0[C, \gamma^a] + [C, \gamma^0]\gamma^a = 0 \qquad \text{ya que } [C, \gamma^\mu] = 0$$